Wissenschaftstheoretische Überlegungen zum Mathematikunterricht

R.Perko,Graz

Die bemerkenswerte unmittelbare Ineffizienz des AHS-Mathematikunterrichts, meßbar etwa an-für Mathematiklehrer meist betrüblichen - nostalgischen Erinnerungskaskaden der AHS-Absolventen (beispielsweise bei Maturafeiern) läßt die Vermittlungs- und Kommunikationsschwierigkeiten im Unterricht vielfach hinter die Legitimationsproblematik des AHS-Unterrichts zurücktreten, obwohl naturgemäß beide zentrales didaktisches Interesse verdienen.

Überlebensstrategien des Alltags, Verdrängungsökonomie und Opportunismus haben nicht nur, bei einigem Wohlwollen verständlich, Lehrinhalte und Fakten verzerrt oder aus dem Gedächtnis der AHS-Absolventen eliminiert, sondern ein seltsam diffuser Mystizismus kennzeichnet die ambivalenten Bewertungen des Unterrichts, die diesen nachträglich eher als überstandenen Dialog mit transzendentalen Mächten (Mächten der Finsternis?) erscheinen lassen denn als faszinierende Facette menschlichen Intellekts. Die vielzitierte Umwegrentabilität des AHS-Mathematikunterrichts (Förderung und Schulung des logischen Denkens, des Abstraktionsvermögens oder der strukturellen bzw. reduktionistischen Strategien) nimmt diesen destruktiven Darstellungen der Effizienz des Mathematikunterrichts ein wenig die Schärfe, läßt aber grundsätzliche Vorwürfe bestehen.

Der aufkeimende Bourbakismus in den AHS zusammen mit dem aufrechten Bemühen der Lehrer um Klarheit und Geradlinigkeit haben zwar manch Geheimniskrämerei und vage Intuition beseitigt, aber offenbar (noch) nicht das prognostizierte Verständnis seitens der Schüler für mathematische Inhalte und Innovationen entstehen lassen.

Bestenfalls werden, zweifellos verdienstvoll, algorithmische Fähigkeiten und der Umgang mit verschiedenen Kalkülen in erfreulicher Präzision (Axiomatik!) entwickelt.

Diese Situation rechtfertigt den Versuch, außermathematische Ideen, etwa wissenschaftstheoretische, zur Schaffung von Arbeitshypothesen heranzuziehen, um gewisse Teile der Vermittlungsschwierigkeiten im AHS-Unterricht (wohl auch auf den Universitäten) zu beleuchten.

Ziel der folgenden Ausführungen ist es nun, zur üblichen These: die Mathematik habe sich nach einem sensiblen "Trial and Error"-Verfahren im wesentlichen entsprechend dem positivistischen Popper'schen Modell entwickelt - eine an das Kuhn'sche Konzept angelehnte epistemologische Variante anzubieten und Teile der Entwicklung der Mathematik (genauer: der damit verbundenen Assoziationen und Ontologien) als einen diskontinuierlichen, von psycho-soziologischen Kontingenzen gesteuerten revolutionären Prozeß zu deuten. Die didaktische Konsequenz einer derartigen Interpretation mathematischer Genese läßt dann in einer Art Kuhn-Piaget-Synthese gewisse Lern- und Lehrschwierigkeiten als "natürlich" und geradezu unvermeidlich erscheinen, Schwierigkeiten, die innerhalb eines gleichmäßigen, vom genialen Geist der Erkenntnis und dem Wunsch nach Wahrheitsfindung gesteuerten innermathematischen evolutionären Modells nur mäßig erklärt werden können und eigentlich kaum auftreten dürften. Derlei Ambivalenzen steigern das Interesse an wissenschaftstheoretisch (grundlagentheoretisch) neutralen Teilgebieten in den AHS (etwa der elementaren Kombinatorik), obwohl gerade der innovative Reiz der von Unwägbarkeiten oder kühnen, zunächst vielfach grotesken mathematischen Ideen und Schwerpunkten ausgeht, das didaktische Programm eines Nachvollzugs der Mathematisierung gewisser Alltagssituationen motiviert und unterstützt. Kurz, der in der Universitätsausbildung der Lehramtskandidaten aus Gründen der Ökonomie bevorzugte glatte Bourbakismus soll im folgenden ein wenig (mit allem Respekt) aus epistemologischer Sicht attakiert werden und darüber hinaus (unter gewissen Voraussetzungen) neue Argumente zugunsten der AHS-Mathematik in die Legitimationsdiskussion mit eingebracht werden. Zu diesem Zwecke ein kurzer wissenschaftstheoretischer Abriß, reduziert auf die explizite Darstellung der Positionen Poppers bzw. Kuhns unter Verzicht auf unmittelbare Miteinbeziehung (oder Darstellung) der konstruktiven Wissenschaftstheorie (nach Lorenzen) oder der kritischen Wissenschaftstheorie (nach Habermas) vgl. [1].

Popper unterstellt, daß am Beginn jeglichen wissenschaftlichen Bemühens eine Theorie vorhanden ist, in derem Licht sich jede Beobachtung oder Tätigkeit vollzieht. Erkenntnis entsteht nicht auf reiner Erfahrungsgrundlage, sondern durch einen kreativen Akt der Schaffung von Theorien. Die Sprache der Theorien und die Sprache der Beobachtung sind nicht zu trennen. Weiters, so Popper, ist für eine Theorie der Anspruch der von Zeit und Ort unabhängigen Allgemeingültigkeit charakteristisch. Wissenschaftlich handelt letztlich nur jener, der diese Theorien an Hand der Wirklichkeit prüft und sich dabei der Deduktion bzw. des Experiments oder der Beobachtung bedient. Eine Theorie ist dann eine brauchbare (metaphysikfreie), auf die Erfahrenswelt bezogene, wenn das System von Sätzen, welches eine Theorie definiert, folgenden Bedingungen genügt:

Widerspruchsfreiheit
Allgemeingültigkeit
Falsifizierbarkeit
Wertfreiheit
Nachprüfbarkeit.

Falsifizierbarkeit bedeutet hier, daß die Menge der möglichen (Basis-)Sätze in zwei nicht leere Klassen zerfällt: a) jene, die im Widerspruch zur Theorie stehen, b) jene, die mit der Theorie verträglich sind. Schlicht gesprochen: die "brave" Theorie soll die Möglichkeit besitzen, sich, etwa im Lichte neuer Fakten, als falsch erkennen zu lassen. Induktion und Psychologismus gelten als unwissenschaftlich. Die Genese der "erfolgreichen" Wissenschaften stellt sich nun, so Popper, als rational rekonstruierbare Abfolge von Theorien dar, die auseinander evolutionär durch Falsifikation hervorgehen und so trotz aller Irrwege und fehlgeschlagenen Versuche (Trial and Error) einen umso gleichmäßigeren Entwicklungsverlauf aufweisen, je vollständiger diese sich bei der Wahl ihrer Theorien des Popper'schen Theorienbegriffs bedienen.

Entsprechend gegensätzlich zu dieser positivistischen und heroischen Interpretation der Art wissenschaftlicher Erkenntnis fällt die Position Kuhns aus, der dem Begriff: Paradigma (Weltbild, Richtschnur, Rahmen) zentrale wissenschaftstheoretische Bedeutung zumißt und wissenschaftliche Betätigung gleich wie jede andere menschliche Beschäftigung konditioniert sieht von psychologischen und soziologischen Kontingenzen, deren Komplexität zunächst aus ökonomischen Gründen weder eine präzise (normative) Definition des Begriffs "Paradigma" zuläßt noch wünschenswert erscheinen läßt. Hat eine Gruppe von Wissenschaftlern,wie bewußt auch immer, ein Kredo (ein Weltbild) gefunden, beginnt sie, so Kuhn, im Sinne dieser Geisteshaltung Wissenschaft zu betreiben (sg.Normalwissenschaft), bis aus gleichfalls im Detail ungeklärten, meist irrationalen Gründen eine Krise des bestehenden Paradigmas entsteht, die schließlich zur Revolution und Konstituierung eines mit dem alten Paradigma inkommensurablen Paradigmas führt. Die Auseinandersetzung der Vertreter verschiedener Paradigmen wird von affektiven emotionellen (ideologieverdächtigen!) Argumenten beherrscht und bedient sich hemmungslos der Methaphysik, der Induktion und des Psychologismus. Somit ist die Entwicklung der Wissenschaften, so Kuhn, als ein revolutionärer Prozess zu deuten, den eine (vielfach undurchsichtige) diskontinuierliche Abfolge von Paradigmen kennzeichnet und die sich einem allzu engen strukturalistischen Ansatz entwindet. Da sich Kuhn bei den als Beleg seiner Thesen angeführten historischen Fallstudien kaum auf die Mathematik (als Wissenschaft) bezieht, muß zunächst der Begriff "Paradigma" (in der Mathematik) vage umrissen werden, um anschließend die Brauchbarkeit solcher Begriffsbildungen (an Hand historischer Fallstudien) zu demonstrieren.

<u>Definition:</u>

Ein Paradigma (in der Mathematik) liege vor, falls

a) die Ontologie der mathematischen Objekte und ihrer Relationen (in traditionell philos.-psychol.Art) festliegt,

b) ein oder mehrere feste Beweisverfahren Verwendung finden (nicht notwendigerweise in Abhängigkeit von der spez.Ontologie),

c) ein gewisses kommunikatives Instrumentarium (etwa Formalismus) festliegt.

Ein Paradigmawechsel bedeutet demnach einen Wechsel der Ontologie oder (und) eine Änderung des Beweisbegriffes bzw. des Formalismus und der Kommunikationsform. Will man die Inkommensurabilitätsthese Kuhns wenigstens zum Teil übertragen, so muß man speziell in der jüngeren Mathematikgeschichte die Charakterisierung eines Paragidmas nur durch den verwendeten Formalismus allein mit äußerster Vorsicht (und Skepsis) betrachten. In der Entwicklung der Grundlagen bzw.Anfänge der Mathematik hingegen spielt dieser oft eine entscheidende Rolle. Die beiden ersten Punkte in dieser Paradigmendefinition entsprechen dem "Inhalt" einer Theorie, der von einem formalen Ausdruck (in welcher Form auch immer) deutlich zu unterscheiden ist, wobei Formalismus und Inhalt gemeinsam, nie isoliert, eine Theorie (innerhalb der Normalwissenschaft!) bestimmen. Unter Verwendung dieser Termini läßt sich die Kuhnsche These wie folgt formulieren: Die Inhalte gewisser paradigmatisch verschiedener Theorien sind inkommensurabel, wenn auch aus Ökonomiebestrebungen (oder Selbstzweck) die formalen Repräsentationen (Schrift, Zeichnungen etc.) subsumierenden Charakter haben, d.h. wenn der formale Teil der (zeitlich!) neuen Theorie aus heutiger Sicht als Erweiterung oder "konsequente" Entwicklung des alten Formalismus erscheint. Im Gegenteil, diese stete Vereinnahmung neuer anderer Inhalte durch einen (zweifellos sehr geschickt) erweiterten Formalismus täuscht einen kontinuierlichen, wenn auch mühsamen, Fortschritt der Wissenschaft Mathematik vor, gesteuert vom genialen Geist der Erkenntnis und der Wahrheit, weitestgehend unabhängig von soziologischen psychologischen "Zufalls"-Konstellationen. Eine solche, historisch unschwer nachweisbare formale Kontinuität, aufgefaßt als wesentlichster Teil der Deskription mathematischer Entwicklung, nicht als Selbstzweck oder metaparadigmatischer Wunsch nach Permanenz dargestellt, sondern als das Walten innerer Kräfte und der Fähigkeit elitärer Geister, nimmt der Mathematik einen Teil ihrer Bodenständigkeit, den Geruch von Durchsetzungsvermögen, Spekulation, Irrtum, Manipulation und harter Arbeit, macht sie scheinbar unabhängig von jeder Ontologie.

Die vom Autor (dieses Beitrags)nun vorgelegte These lautet also nochmals im Klartext: Abgesehen von den Anfängen der Mathematik (hier zeigt selbst der Formalismus eine überraschend sprunghafte Eigendynamik) läßt zwar die formale Deskription (und formale Kommunikation) mathematischer Inhalte und deren Genese ein evolutionäres Verhalten (eine formale Kontinuität) erkennen und erklärt den facettenreichen Siegeszug des Bourbakismus, die Entwicklung mathematischer Intuition hingegen bzw. der Gesamtheit der mit einer mathematischen Theorie verbundenen Assoziationen zeigt einen diskontinuierlichen Verlauf und revolutionär paradigmatische Züge.

Nun zu den angekündigten historischen Fallstudien.

(i) Die Einführung der Null als Zahl.

Die Mathematikgeschichte zeigt, daß vor der Verwendung der Null [4] (als Symbol) im Zusammenhang mit der Positionsschreibweise nur recht unhandliche, meist unsystematische Schreibweisen zur Darstellung der natürlichen Zahlen vorhanden waren. Somit ist die Null zunächst als Teil einer geschickten Symbolik (mit einer für die damalige Zeit überraschenden Eigendynamik) aufzufassen, die die Ontologie der natürlichen Zahlen, etwa für den Empiriker durch Abzählergebnis nach einem Zählprozeß oder im Fall des Platonikers als Teil einer Ideenwelt charakterisiert, nicht berührt. Betrachtet man die Situation, in der sich ein Empiriker befindet, wenn man ihn : Abzählung von Gegenständen auffordert, die nicht vorhanden sind, und berücksichtigt, daß dafür Worte wie "leer", "nichts",etc. zur Verfügung stehen, so ist es für ihn konsequent, eine Null,mit dem gleichen Inhalt wie der bisherige Zahlbegriff versehen, abzulehnen bzw. solche Spielereien für unnötig und sinnlos zu erklären. Der Platoniker, wie auch immer er zu seiner idealen Zahlenwelt (Paradigma!) gekommen sein mag, ist weder durch pragmatische noch opportunistische (Zweckmäßigkeit, Bequemlichkeit etc.) Argumente von seiner einmal gefaßten Vorstellung über das Wesen der Zahlen abzubringen und kann zu einer Änderung (nicht Erweiterung) seines Zahlbegriffs nur durch Einflüsse von "außen" bewegt werden. Das heißt, sowohl Empiriker als auch Platoniker werden nicht allein durch eine gewissermaßen innere Evolution der Mathematik zu einer Zahlenbegriffserweiterung bzw. zu neuen Existenzannahmen geführt, sondern äußerst komplexe Wechselwirkungen gestatten die Konstituierung des neuen Zahlenparadigmas, versehen mit einem erweiterten (wenn man will, sehr fruchtbaren) Formalismus.

Es soll hier nicht der Eindruck entstehen, daß keinerlei innermathematische Vorgänge die Einführung der Null (trotz historischer Verfälschung aus Einfachheit so genannt) über ihre Symbolbedeutung hinaus als (gleichberechtigte) natürliche Zahl begünstigt hätten, aber die lang andauernde, historisch leicht verfolgbare [4]Diskussi über Sinn und Zweck solcher Begriffsbildungen (Null als Zahl) beweist, nicht zuletzt durch die extrem ideologische Färbung der verwendeten Argumente, die durchaus adäquate Beschreibung dieses Vorgangs mit Hilfe der Kuhnschen Termini.

(ii) Das Paradigma "Komplexe Zahlen"

Alle vor den "Komplexen Zahlen" entstandenen Zahlenbegriffe waren durch die Möglichkeit gekennzeichnet, diese Zahlen auf einer Geraden (in der euklidischen Geometrie) anzuordnen und auf diese Weise ein zusätzliches Unterscheidungskriterium und nützliche Anschauung zu besitzen. Die stürmische Entwicklung der Gleichungstheorie hatte zwar bereits zur quasi-symbolischen Verwendung von im Sinne des geltenden Zahlenparadigmas nichtexistenten absurden Begriffsbildungen wie $\sqrt{-1}$ geführt, war jedoch weit entfernt, den Zahlbegriff, im Hinblick auf solche Kuriositäten, auszudehnen. Untersucht man die eher ambivalenten Beziehungen bedeutender Mathematiker (Cardano, Bombelli, Descartes, Leibnitz [4]) zum Thema "Wurzeln aus negativen Zahlen", so zeigt sich, daß trotz formaler Erfolge ein latentes Unbehagen (Krise!) jede entsprechende Bemühung begleitete, bis ein neuer Zeitgeist, der seinen Höhepunkt in den Interpretationen Gauss fand, ein Umdenken möglich machte, freilich unterstützt durch den Umstand, daß die bisherigen (formalen) "Schätze" der Mathematik unberührt blieben. Hat nun ein Mathematiker (oder eine Mathematikergeneration) ihr neues Kredo gefunden (etwa in diesem Fall: Zahlen sind zunächst uninterpretierte Zeichen, aus denen nach gewissen Regeln mit Hilfe formal logischer Schlüsse Sätze abgeleitet werden), treten sie in eine neue Normalwissenschaftsphase. Die historische Analyse zeigt wiederum deutlich, daß trotz der die formale Kontinuität in keiner Weise verletzenden Innovation Gauss die Akzeptierung der revolutionären Theorie über die komplexen Zahlen langer Zeit bedurfte und auf großen emotionalen Widerstand stieß, der selbst terminologisch Spuren hinterlassen hat (imaginäre Zahlen!).

Ähnliche Paradigmensprünge ließen sich für die irrationalen oder negativen Zahlen bzw. reellen Zahlen entsprechend zeigen, analog in der Entwicklung neuer Geometrien oder bei der Entstehung des infinitesimalen Kalküls. Unschwer läßt sich weiters die Auseinandersetzung: Intuitionismus Brouwerscher Prägung kontra Hilbert-Bourbaki-Mathematik als Inkommensurabilität verschiedener Paradigmen deuten [5].

Die beiden angeführten Fallstudien genügen aber, obwohl sie reichlich konstruiert wirken, um die Verwendung der eingangs definierten Begriffsbildungen zu rechtfertigen. Sie demonstrieren, daß die durch die formale Kontinuität scheinbar implizierte Wertfreiheit der Mathematik zumindest historisch Utopie bleibt. Im folgenden sei vorausgesetzt, daß die Beschreibung mathematischer Entwicklung (oder eines Teils derselben) mit Hilfe des Kuhnschen Ansatzes richtig ist. Untersucht man nun die geradezu klassischen Schwierigkeiten im Unterricht (Einführung der Null, der komplexen Zahlen, des Limesbegriffs, der Integral-bzw.Differentialrechnung usw.), so ist es empirisch leicht belegbar, daß gerade dort, wo in der Geschichte der Mathematik Paradigmensprünge stattgefunden haben, die (das Bild des Schülers von der Mathematik entscheidend beeinflussenden) Verständnisprobleme auftauchen, trotz äußerst elegantem, der (formalen) Genese entsprechendem Vorgehen.Das heißt, diese nahezu unüberwindbaren didaktischen Hindernisse (Lernphänomene) finden in der Kuhnschen Theorie eine "natürliche" Erklärung. Es kann dem Schüler zwar durch entsprechende Wahl einführender Beispiele, durch Berufung auf bislang akzeptierte Schlußweisen, kurz, durch didaktisch optimale Gestaltung des Unterrichts, die Erkenntnis dessen, was wirklich neu ist, wesentlich erleichtert werden, aber ein echtes Verständnis (im Sinne des Verstehens einfacher Alltagszusammenhänge) ist damit nicht erreicht. Nach den getroffenen Voraussetzungen bleibt ein solchermaßen definiertes Verstehen unmöglich, und nur ein artikuliertes Kredo (vielleicht pragmatisch motiviert) gibt dem Schüler Selbstvertrauen, diese neuen mathematischen Ideen zu verfolgen bzw. die überraschende Relevanz derartiger (zunächst obskurer) Gedankengänge bei der Bewältigung verschiedener realer Probleme zu erkennen. Andererseits wertet ein so geprägtes Bild der Mathematik die Rolle der persönlichen (vielfach irrationalen) Phantasie auf und mindert letztlich die Technologiehörigkeit des heranwachsenden Menschen.

Wie man auch immer zu derlei spekulativen Arbeitshypothesen stehen mag, die Brauchbarkeit wissenschaftstheoretischer Argumentationen in der Didaktikdiskussion ist nicht zu leugnen, und eben dieses sollte demonstriert werden. Neigt man weiters dazu, als fundamentales didaktisches Anliegen im AHS-Unterricht die Darstellung der Mathematisierungen von Alltagssituationen aufzufassen und versucht, der Wirklichkeit entsprechend den dynamischen Prozeß der Mathematisierung im Spannungsfeld individueller gesellschaftlicher (politischer) Interdependenzen anzusiedeln und mathematische Aktivität im Sumpf menschlicher Abhängigkeiten und Unzulänglichkeiten als ein (zunächst) begeisterndes (innovatives)

Bemühen zu deuten, so gewinnt der AHS-Unterricht an Vitalität und allgemein Menschlichem. Widmet man sich nun innerhalb dieses Kontextes der Legitimationsproblematik der Mathematik in den AHS (oder generell: der gesellschaftlichen Relevanz der Mathematik), gewinnt man zur üblichen Argumentationspalette etwa umrissen mit den Begriffen: Gewohnheit, Nützlichkeit, Freude, Schönheit - neue Überlegungen, die der gefährlichen Ambivalenz (dieser Be griffe) und der Gefahr einer Reduzierung der mathematischen Legitimation auf den Hinweis (technologischer) Nützlichkeit begegnen. Die Überbetonung der Nützlichkeit (im aristotelischen Sinne) endet wohl in letzter Konsequenz bei einem AHS-Lehrstoff, der sich nach Darstellung und Entwicklung elementarer mathematischer Kulturtechniken auf die Vermittlung algorithmischer Fertigkeiten (ob es sich nun um das "Integrieren" oder um den Umgang mit algebraischen Regeln handelt), deren Schwerpunkte die Technokraten der Administration in friedlicher Symbiose mit den Exponenten der Industrie festlegen, beschränkt. Nicht Genese mathematischer Ideen, nicht Mathematisierung, weder Schönheit noch Freude sind dann didaktisch-pädagogische Ziele, sondern eine zweckoptimierte Fakten- und Formelvermittlung. So wenig man sich dem Ruf nach Praxisnähe und Alltagsbrauchbarkeit des AHS-Unterrichts verschließen kann und beispielsweise zu Recht nach Stochastik und Programmieren ruft, so klar sollte man die Gefahren des Utilitarismus erkennen. Ein Unterricht hingegen, der sich auch (mit Liebe) der Mathematisierung widmet und sich zu diesem Zwecke einer historischen Analyse, versehen mit all den sozio-psycho-anthropolo-ethnologischen (und wissenschaftstheoretischen) Abhängigkeiten und Zufälligkeiten bedient, erklärt nicht nur die Mathematik oder das Wesen mathematischer Ideen, sondern gibt dem AHS-Unterricht einen schillernden, umfassenden Bezug zum Leben an sich, der weit über technologische Anwendbarkeit hinausgeht und das "Menschliche" mit dem "Kalkül" einprägsam vermengt. Mehr kann man, so scheint es, für die Legitimation nicht tun.

Literatur:

1) H. Tschamler: Wissenschaftstheorie (Eine Einführung für Pädagogen), Klinkhardt, 1978.

2) Kuhn, T.S.: Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. Suhrkamp, 1973.

3) Popper, K.: Logik der Forschung. Mohr, Tübingen, 1969.

4) Gerike, H.: Geschichte des Zahlbegriffs, BI.172/722a, 1970.

5) Perko, R.: Der Beweis als Verschleierungsinstrument des paradigmatischen Charakters der math. Entwicklung unter Zugrundelegung des epistemologischen Kuhn'schen Konzeptes.

In: Beweisen im Mathematikunterricht. Didaktik der Math. Band 2, HPT. 1978.

Dr. R. Perko,
Universität Graz